数学讲义

LeeStars

2025.07.10

目录

1 序言

数学这门课程，本身就是一个无穷无尽的知识库，一个人穷尽一生也无法将其完全理解、领会。但是，从小学到中学，从初中到高中，我们经历的是一次又一次对数学体系的重构，对数学概念的

剖析和再定义。初中数学的重点更加侧重于“数形结合”等思维的培养上，但是现在却越来越习惯于公式化地做题。这显然是不利于数学这门自然科学的学习的。

举一个最简单的例子：初中的课程，包括数的划分、函数、几何等等，是严格局限在课本定义和定理范围内的。但是，有没有人可以问出：“为什么要这样划分数字？”“这样的划分是否合理？”“函数能不能反映更多事物之间的关系？”“函数只能有一个自变量吗？”“三角形的内角和一定是 $180°$ 吗？”等等诸如此类的问题？

于是，借一位我很尊敬的助教的话：“我们要以一种‘高观点’来解决低问题。”所谓“高观点”，是从一个知识点的根本出发，一步一步推导出表象，解释“为什么”和“凭什么”的合理性问题。

奈何本人学识浅薄，只能以我目前掌握的知识，尽可能架构出一套完整的知识体系（当然是以高中知识为基础）。

高中数学的一大任务就是对初中的概念进行“再定义”，通过“集合论”这一近代数学的基石，让所有概念通过“集合”这一概念来定义。再辅以向量、导数等工具，使之自洽。所以，我将尽可能将初、高中的知识串联在一条主线上，考虑每个概念、定义从何而来、为何而来，在这个过程中补充必要的知识点。

最后，我希望你，无论是谁，都可以保留这最原初的、对数学之美最本质的热爱，坚持下去。哪怕你以后所学的专业、从事的职业和数学毫无关系，你在其中获得的思想、观点乃至你的审美，都在潜移默化地改变着你。

愿这集全人类智慧的学科能够至少对你产生一点点影响。

2 必须知识

2.1 集合/集合论

先简要介绍一下集合论的基本概念：

定义 1 (集合论) *集合论是研究“集合”这一基本对象的一个分支。*

定义 2 (集合) *集合，简称集，是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。通常用大写字母表示。*

集合具有确定性、互异性和无序性。

（以下仅方便记忆，非标准描述。下文中如果不强调定义或定理，均为非正式描述。）

- 确定性：元素与集合的关系一定是“属于”或“不属于”，不存在模棱两可的关系；
- 互异性：同一集合内元素不重复；
- 无序性：同一集合内元素顺序不重要。

先来介绍一个特殊的集合———空集（没有元素的集合）：ϕ

然后看看怎么表示一个集合：

- 例举法：将集合中的每个元素都写出来，放在大括号里，以逗号分隔。

  例如：光的三原色 {红，蓝，绿}，1 到 10 以内的质数 {2，3，5，7}

- 描述法：明确指出元素及其性质。

  例如：直线 y=2x+1 图像上所有的点 {(x,y)|y=2x+1}

- 图像法（Venn 图法），即用 Venn 图来表示集合及其之间的关系。
- 区间法：专用于数集，便于划分。
- 符号法：特殊集合。

接下来考虑集合中的元素与集合、集合与集合的关系：

集合中的元素与集合的关系分为属于（$\in$）和不属于（$\notin$）。（若元素在右而集合在左，则符号反向。）顾名思义，这一关系即反映元素是否存在于该集合中。

集合与集合的关系有包含/包含于（$\supseteq$ / $\subseteq$）和真包含/真包含于。

定义 3 (子集) *若 $\forall x \in A$，都有 $x \in B$，则称 A 是 B 的一个子集。记为 $A \subseteq B$。*

定义 4 (真子集) *若 $\forall x \in A$，都有 $x \in B$，且 $\exists x \in B$，有 $x \notin A$，则称 A 是 B 的一个真子集。记为 $A \subsetneqq B$*

至于集合的运算、补集、交集、并集乃至容斥原理，暂时不做介绍。（如果再补充的话那就在这之后补吧 ）

集合是一种抽象的结构，虽然我们后面接触到的集合几乎全部都是数集，但这不代表集合内的元素不能是其他东西。如果在一个集合中定义好各种运算和封闭性，还可以构造出相应的“群”、“环”和“域”等概念，乃至推广到线性空间。

而从计算机科学（我的专业）来看，无论是数据的布尔运算、位运算还是信息的存储、读取，同样离不开集合论的表达；用集合的形式及其之间的关系来表示其他领域的知识，正是集合论作为近代数学基石的体现

接下来，我们将进一步讨论各种数集，这不仅会重构一次数的定义，也将引申出一个由小学至高中贯穿始终的数学思路：“扩域”。

2.2 数集/数域

从小学至今，我们研究的数字从正整数 $\mathbb{Z}^+$，到整数 $\mathbb{Z}$，到有理数 $\mathbb{Q}$，再到实数 $\mathbb{R}$……后者总是包含前者，从集合的角度来看，就像是我们在一次又一次地跳出原有的集合，然后进入/扩大到一个范围更大的集合。我称之为“扩域”，意为“数域/数集的扩大”。

数集这部分没什么要讲的，就是将同一类数字放在一起，作为一个集合，然后给他起一个名字就行了。我们需要考虑的是，到底是什么促使我们一次一次地扩大概念。从正整数到整数，我们经历了“负数”；从整数到有理数，我们经历了“分数”；从有理数到实数，我们经历了“无理数”；包括加入高中后，从实数集 $\mathbb{R}$ 到全数集/复数集 $\mathbb{C}$，我们会经历“复数/虚数”。

那么，这些让我们扩大数集的概念又从何而来？“负数”来自人类对盈亏的理解，需要负数来表示亏损；“分数”来自于对不可分之划分，来表示均分后的结果；“无理数”来自勾股定理后对斜边长度的质疑，以此表示非平方数的开方；以及“复数”，诞生于三次方程的求根过程，而保证了二次方程一定有两个根，是不可开方数之开方，以契合所谓“代数基本定理”。

定理 1 (代数基本定理) *任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根，并由此推出，n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）。*

虽然写在纸上仅寥寥几句，但在数学史上，却是人类几千年经验和思想的集合。这一部分借鉴了我的数学史课老师的讲义，但是，我们一定要知道这些东西从何而来。高中时我特别喜欢记数学史和化学史，前人的思路、方法同样值得我们学习。剩下的也就没什么要讲的了。

3 关于平面几何的扩展

这一部分是对《特殊平行四边形》这一章的扩展。

3.1 关于证明

证明题无非三种方法：由因及果、由果溯因、两向夹逼。

由因及果是初中接触最多的方法，从题目给出的，或者暗示的信息条件来一步一步推导出需要求证的命题。这个过程需要的是长时间使用后产生的条件反射和经验，以及逆向思维主导的对证明过程充分性的验证。

由果溯因则是反向推导，常见的就是反证法，即通过否定结论来推出条件的不可避免的矛盾。这个过程之所以合理，是因为存在“原命题和逆否命题是等价命题”这一约束。（该约束证明详见罗素公理体系）

两向夹逼则是两者的结合，其过程是试图找出一个良好的中间态，达到“条件 $\rightarrow$ 中间态 $\leftarrow$ 待证明命题”的效果。实际上这个过程非常复杂，因为这个过程不仅要求题目条件是中间态的充分条件，还一定程度上要求中间态与结论等价。不过好在初中的逻辑关系几乎全是充分必要条件的推导，所以暂时不需要关注。

3.2 关于矩形、菱形和正方形

这三个图形的特点及其关系无需赘述，不过，我们可以通过上文“集合”的视角重新审视它们。我们可以将“所有的平行四边形”、“所有的矩形”、“所有的菱形”和“所有的正方形”视为四个集合，分别记为：$\mathbb{P}$(parallelogram)、$\mathbb{R}$(rectangle)、$\mathbb{L}$(lozenge) 和 $\mathbb{S}$(square)，则会有如下关系：

- $\mathbb{S} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{P}$
- $\mathbb{S} \subsetneqq \mathbb{L} \subsetneqq \mathbb{P}$

从这个视角来看，证明过程相当于缩小集合的过程，通过已知条件来一点一点缩小范围。（当然，这几个符号是我现想的，绝对不是实际符号，实际上也没有标准符号。）

3.3 关于平面几何

如你所见，现有的所有证明其实都是在平面上进行。平面几何大多不难，但是可以出的非常复杂。这一点尤其体现在每年全国高中生数学联赛（B 卷）省级赛 B 部分的第一题。出现多条辅助线、辅助圆都是家常便饭。当然，初中的题目简直就是标准流程，做多了以后，哪个条件需要怎么处理都是一目了然的。

辅助线多见于对现有条件的加以利用，例如：知道中点后很大概率要做中位线来使用中位线定理；证明面积关系大概率要做出高线或延长底边来找到等量关系。这算是一种长期积累的经验。

平面几何的关系在高中的立体几何中同样成立，因为它们同属于所谓“欧几里得空间”：

定义 5 (欧几里得空间) *有限维实内积空间即称为欧几里得空间。*

维度有限、可度量、限制在实数范围就是其特点。n 维的欧几里得空间记为 $\mathbb{R}^n$，初中的研究范围就是 $\mathbb{R}^2$，而高中就是 $\mathbb{R}^3$。

除此之外的空间统称“非欧空间”，其中并不遵循欧几里得的五大公理，自然现在所学的定理、规律也无法使用。举一个最简单的例子：你能找出内角和 $270°$ 的三角形吗？

定理 2 (欧几里得五条公理) 这五条公理（注：与 5 条公设不同）记录在《几何原本》上，第五条至今仍存在争议：

- 过相异两点，能作且只能作一直线。（直线公理）
- 线段可以任意地延长。
- 以任一点为圆心、任意长为半径，可作一圆。（圆公理）
- 凡是直角都相等。（角公理）
- 两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角和小于两个直角，则两直线则会在该侧相交。

实际上，欧几里得几何体系还有 5 条公设、23 个定义等内容，而且有相当多的概念没有给出定义，不同版本之间表述也各不相同。

4 一元二次方程/函数

4.1 从二次函数开始

众所周知，最基本的二次函数是 $y = x^2$，其图像是以 $(0, \frac{1}{4})$ 为焦点、$\frac{1}{4}$ 为焦距的抛物线。而对于一般的二次函数 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$，$a$ 的绝对值衡量着抛物线开口的大小（控制抛物线的焦距），正负控制开口方向；所谓对称轴和顶点，都可以在原二次函数 $y = ax^2$ 通过平移达到。平移过程：

- 向左平移 $\frac{b}{2a}$（左加右减）
- 向上平移 $c - \frac{b^2}{4a}$（上加下减）

4.2 函数与方程

函数与方程的联系即在于“零点”：令 $y = 0$。

此时，函数对于的零点（注，零点的该坐标的横坐标而非一个点）就是方程的根。

4.3 二次方程的解

根据上文提到的“代数基本定理”，所有二次方程都会有两个根，对应书中的“两个实根”和“无实根”。其判定可以通过上述的顶点式得到：所谓 $\Delta = b^2 - 4ac$ 其实是顶点的正负。

但是，当图像与 x 轴无交点时，二次方程还有没有根？对此，我们引入“虚数单位”i：

定义 6 我们将方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根定义为 i，即有 $i^2 + 1 = 0$。

那么，举一个简单的例子：$x^2 + 2x + 3 = 0$，$\Delta = b^2 - 4ac = -8$。那么，根据求根公式，可得两根分别为：$x_1 = \frac{-2-\sqrt{-8}}{2}, x_2 = \frac{-2+\sqrt{-8}}{2}$，即 $x_1 = -1 - \sqrt{2}i, x_2 = -1 + \sqrt{2}i$。带回原式可验证成立。

4.4 复数

定义 7 (复数) 数学的一种数，$z = a + bi$，其中 a 称为“实部”，b 称为“虚部”，a, b 均为实数，$i^2 = -1$。

由此，我们在数轴的基础上拓展出“复平面”的概念：

定义 8 (复平面) 复数平面（*complex plane*）是用水平的实轴与垂直的虚轴建立起来的复数的几何表示。它可视为一个具有特定代数结构笛卡儿平面（实平面），一个复数的实部用沿着 x-轴的位移表示，虚部用沿着 y-轴的位移表示。

通过 $i^1 = -1, i^4 = 1$ 这个条件，我们考虑到旋转关系，自然的可以构建出垂直于实数轴的虚数轴。由此，一个复数和平面中的点和一个向量会建立起一一对应的关系：

$$z = a + bi \rightleftharpoons (a, b) \rightleftharpoons \vec{a} = (a, b)$$

定义 9 (共轭复数) 对复数 $z = a + bi$，定义 $\bar{z} = a - bi$ 为其对应的共轭复数。

复数在中学阶段的影响不大，但是在复空间和多项式理论中有极其重要的作用。

4.5 高次函数/方程?

不论是高次函数还是高次方程，都是基于多项式理论这一体系的。在高等代数中，“一元 n 次多项式”对加、减、乘三种运算保持封闭，而除法则不尽然，因此称之为“一元 n 次多项式环”。

至于高次函数的图像画法，除了比较复杂的利用全定义域 2 阶导数来确定图像，在知道全部零点的时候，可以“穿插”地近似画出图像，用于方便地解决高次不等式问题。

5 概率论

5.1 等可能事件

等可能事件的古典概率论的一大基础，在有限结果的情况下，我们会要求每种结果出现的概率相同。

定义 10 (等可能事件) 如果一次试验由 n 个基本事件组成，而且所有结果出现的可能性都是相等的，那么每一个基本事件互为等可能事件

等可能事件的前提，允许我们在不经过实际实验的情况下对概率进行分析，做到在合理范围内“纸上谈兵”。（毕竟要是重复几百几千次实验，无论是成本还是成果都不值）那么，怎么保证等概率呢？于是，我们引入古典概型和几何概型，即在有限和无限意义下的等可能模型。

5.2 古典概型、几何概型

定义 11 (古典概型) 如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的，且每个单位事件发生的可能性均相等，则这个随机试验叫做拉普拉斯试验，这种条件下的概率模型就叫古典概型。

定义 12 (几何概型) 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度 *(* 面积或体积或度数 *)* 成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型。

在这两种模型下，我们可以满足结果有限、概率均等的要求，通过列表或直接计算的方法求得概率。

5.3 频率估计概率？

我们回顾“以频率估计概率”这件事，会发现：当我们可以通过频率估计概率时，往往需要很大量的实验次数（或称采样次数），而最终得到的概率，往往又是频率在大量实验后趋向的一个稳定的数值。关于试验次数，课本中提到的瓶盖投掷实验一共进行了 400 次，很明显是保证了初中生的可实施性。但是，“以频率估计概率”（在计算机科学中称之为“蒙特卡洛方法”）在计算机模拟下，需要的是大约 50000 次以上的实验，这样才能保证结果的可采纳和合理性。至于原理，需要使用到“伯努利大数定理”。

定理 3 (伯努利大数定理) 设 μ 是 n 次独立试验中事件 A 发生的次数，且事件 A 在每次试验中发生的概率为 p，则 $\forall\varepsilon > 0$，则会有如下关系：

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\mu_n}{n} - p| < \varepsilon) = 1$$

除此之外，还有各种弱大数定理和强大数定理的表述和证明。这些定理均保证了“频率估计概率”这件事的合理性。

6 三角函数！

6.1 弧度制

众所周知，三角函数也是函数，而函数反映了两个变量（可以是多个）之间的关系。但是，回顾之前的函数，至少反映的都是实数与实数的关系。从这个角度来看，初中三角函数的定义并不好，它是“角度”与数的关系。于是，我们引入诸多概念，试图将三角函数优化成一个好的函数。

定义 13 (单位圆) 平面直角坐标系上，圆心为原点，半径为单位长度的圆。

此时，我们取圆上一点，连接该点与圆心，得到了一个这条线段与 x 轴正方向的夹角和该圆心角对应的一段弧，并以此为角度增加的正方向。此时，我们可以设想：一个圆心角只能唯一地对应一段弧，那么借助单位圆的概念，我们引入角度的另一个单位：“弧度制”

定义 14 (弧度制) 用弧长与半径之比度量对应圆心角角度的方式。单位“弧度”，写作 rad。角度以弧度给出时，通常不写弧度单位。

也就是说，我们用单位圆上角度对应和弧长来表示了角的大小。那么，单位的换算也就很容易了：$180° = \pi$。

除此之外，我们还可以想到：角度可以有多大？由于弧度制的存在，我们可以用任意的实数来表示一个角度。既然实数没有上下限，自然角度也就没有上下限，我们称之为“任意角”。将其一边（称为“始边”）固定在平面直角坐标系的 x 非负半轴上，可以规定其大小、正负以及区分。我们规定旋转边顺时针旋转为正，逆时针为负；大小则是其转过的角度；若终边位于某一象限，则称之为“象限角”，否则称为“轴线角”。例如，我们可以称 $1395° = 7 * 180° + 135° = 7\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{31}{4}\pi$。我们可以理解为其终边旋转了 7 个半圈加 $135°$。

至此，对于三角函数定义域的补充结束了。现在的三角函数是一个从任意实数对应到一个实数的良好函数了。

6.2 基本三角函数

初中的三角函数（当然高中也是）只有正切 tan、正弦 sin 和余弦 cos。定义已如书中所述（当然，对于任意角来说，应该用单位圆和三角函数线来定义。）其实，还存在另外三个三角函数：余切 cot、正割 sec 和余割 csc，它们分别是 tan、cos、sin 的倒数，而后两者以及不在讨论了。

α 角度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
α 弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0
$\cot\alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$		0	

三角函数不仅有极其复杂的互化、转换、变形关系，而且在复变函数、傅里叶级数等方面有重要作用。到高中阶段，三角函数还在矢量分解、空间投影、极坐标等方面发挥作用。

6.3 乱七八糟的公式

和差角关系、诱导公式、和差化积、积化和差、倍角公式、半角公式……